International Science and Technology Journal
المجلة الدولية للعلوم والتقنية

Volume 33 العدد
Part 1 المجلد
October 2023 اكتوبر

تم استلام الورقة بتاريخ:24/ 8 /2023م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:1/ 10/2023م

بعض التطبيقات الفيزيائية لتحويل لابلاس

ليلى علي القرازي **ايمان العجيلي دامان**

كلية التقنية الهندسية – جنزور

Laila.gerazi@gmail.com Eman.damann@gmail.com

الملخص:

نقدم في هذه الورقة البحثية دراسة عن تحوبل لابلاس من حيث: المنشأ، التعريف، الخصائص، الفوائد، حيث تتمثل خلاصة البحث في أن تحويل لابلاس مؤثر خطي، يجرى على الدوال(التوابع) المستمرة أو المستمرة مقطعيا لتحويلها من نطاق المتغيرات الحقيقية إلى نطاق المتغيرات المركبة، وبالمقابل يوجد تحويل عكسي للابلاس والذي يحول الدوال من نطاق المتغيرات المركبة إلي المتغيرات الحقبقبة، ومن أهم الجوانب المميزة لهذا التحويل إنه يعطي حلولا محددة للدوال الممكنة، ولذلك وضعت جداول تحمل الحلول المحتملة بحيث يرجع إليها، كما يعتبر تحويل لابلاس من أهم التحويلات التكاملية الذي له أهمية في حل بعض التكاملات المعقدة، وكذلك بعض المعادلات التفاضلية، حيث تم إستخدام هذا التحويل في بعض التطبيقات الواقعية والتي من أهمها: الإهتزاز التوافقي لقضيب مرن مثبت من طرفيه، ومحمل بحمل، وسريان التيار داخل دائرة كهربائية، ثم قمنا بصياغة المعادلات الحاكمة لهذين التطبيقين، وإستخدام التحويل لحلها.

الكلمات الإفتتاحية: تحويل لابلاس، المعادلات التفاضلية، تحويل لابلاس العكسي، الإهتزاز التوافقي، الدوائر الكهربية.

تم استلام الورقة بتاريخ:24/ 8 /2023م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:1/ 10/2023م

Some physical applications of the Laplace transform

Laila Ali Geraz, Eman Aleajili Daman
College of Engineering Technology – Janzou
Laila.gerazi@gmail.com, Eman.damann@gmail.com

Abstract:

In this paper, we present a study on the Laplace Transform in terms of: origin, definition, characteristics, and benefits. On the other hand, there is an inverse Laplace transform, which transforms functions from the range of complex variables to the dome variables, and one of the most important aspects of this transformation is that it gives specific solutions to possible functions, and therefore tables with potential solutions have been developed so that it can be referred to, and the Laplace transform is considered one of the most important integral transformations that has importance In solving some complex integrals, as well as some differential equations, where this transformation was used in some real-world applications, the most important of which are: the harmonic vibration of a flexible rod installed from, and the flow of current within an electric circuit, then we formulated w its terminals and loaded with a load the governing equations for these two applications, and the transformation was used to solve these equations.

Keywords: Laplace transform, differential equations, Inverse Laplace transform, harmonic oscillation, electrical circuits.

المقدمة:

أدرك الرياضيون والعلماء أن الكثير من القوانين الفيزيائية، يعبر عنها بصورة أفضل بواسطة معادلات لا تحتوي فحسب على المتغيرات المجهولة، وإنما أيضا تحتوي على مشتقاتها، ولايزال الإهتمام بالمعادلات التفاضلية وتطبيقها مستمر إلى يومنا هذا، وقد نتج عن الجهود التي بذلت لحل مختلف الموضوعات المتعلقة بالمعادلات التفاضلية إثرا للتحليل الرياضي ، وخاصة دراسة العمليات اللانهائية، واستمرت جهود الباحثين في إكتشاف تطبيقات جديدة لحل المعادلات التفاضلية، ليس فقط في العلوم الفيزيائية، بل في

تم استلام الورقة بتاريخ:24/ 8 /2023م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:1/ 10/2023م

شتى المجالات، ومن أهم الطرق المستخدمة في حل هذه المعادلات هو تحويل لابلاس، نسبة إلى عالم الرياضيات والفيزياء الفرنسي بيير سيمون لابلاس(1749 −1827)

التحويل هو أداة لتحويل الدوال من شكلها الأصلي إلى شكل أخر أبسط منه، فهو تحويل تكاملي مهم، يستخدم في حل المسائل الفيزيائية، حيث يحول الدوال الرياضية من مجالها إلى مجال أخر، ويعرف كتكامل على المدى من الصفر إلى اللانهاية، ويكون فعالا بوجه خاص في حل مسائل القيم الإبتدائية المحتوية على معادلات تفاضلية خطية بمعاملات ثابتة [1، 2].

فالتعريف الرياضي لتحويل لابلاس: هو تحويل رياضي خطي يتم فيه تحويل الدالة الزمنية إلى دالة مركبة، ويعرف كتالي:

$$F(s) = L\big(f(t)\big) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt \qquad (1)$$

أعداد حقيقية $s = \sigma + jw$ حيث σ , w الدالة المحولة بدلالة الكمية المركبة $F(s)$

الدالة الأصلية بدلالة الزمن$f(t)$

رمز لتحويل لابلاسL

ويتعلق معنى التكامل المعطى بالعلاقة (1) بنوع التابع المدروس، وتجدر الإشارة إلى أن الشرط اللازم لوجود تحويل لابلاس يأخذ تابعا في المجال $[0, \infty)$، أي أن قابل للتكامل على الفترة f هذا التكامل، أن يكون التابع [3].

الزمن$f(t)$ ويحوله إلى تابع في مجال لابلاس $F(s)$

بعض خصائص لابلاس

خاصية الخطية:

$$L\{a\, f(t) + b\, g(t)\} = aF(s) + bG(s) \qquad (2)$$

b ثوابت $f(t)\,, g(t)$ دوال في المتغير t ، a حيث

خاصية الإزاحة في مجال الزمن:

$$L\{f(t-T)\} = \; e^{-sT}\, F(s) \qquad (3)$$

تم استلام الورقة بتاريخ:24/ 8 /2023م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:1/ 10/2023م

خاصية تحويل لابلاس للمشتقات:

فإن: $f, f^{`}, \dots\dots\dots\dots . f^{(n-1)}$ دوال متصلة على الفترة $[0, \infty)$ لتكن

$$L\{f^{n}(t)\} = s^{n}F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{k}(0) \tag{4}$$

حيث

$F(s) = L\{f(t)\}$

على أنه مؤثر عكسي للمؤثر $F(s)$ ويرمز له بالرمز L^{-1} أما تحويل لابلاس العكسي فيعرف للدالة

، ويمكن التعبير عنه رياضيا كتالي[3]: L

$L\{f(t)\} = F(s) \;\leftrightarrow\; L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$

الجدول1.يوضح الدوال الأساسية لتحويل لابلاس ولابلاس العكسي[4]

$L\{f(t)\} = F(s)$	$L^{-1}\{f(s)\} = F(t)$
$L\{c\} = \frac{c}{s} \qquad s > 0$	$L^{-1}\left\{\frac{c}{s}\right\} = c$
$L\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} == \sqrt{\frac{\pi}{s}}$	$L^{-1}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{s}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{t}}$
$L\{t\} = \frac{1}{s^2}$	$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$
$L\{e^{kt}\} = \frac{1}{s-k} \quad s > k$	$L^{-1}\left\{\frac{1}{s-k}\right\} = e^{kt}$
$L\{\sin(kt)\} = \frac{k}{s^2+k^2}$	$L^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\} = \sin(kt)$
$L\{\cos(kt)\} = \frac{k}{s^2-k^2}$	$L^{-1}\left\{\frac{k}{s^2-k^2}\right\} = \cos(kt)$
$L\{t^{n}\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$	$L^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = t^{n}$

تم استلام الورقة بتاريخ:24/ 8 /2023م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:1/ 10/2023م

تحويل لابلاس والمعادلات التفاضلية الخطية:

من أهم تطبيقات تحويل لابلاس حل المعادلات التفاضلية الخطية، فإذا أخذنا الصورة العامة للمعادلة التفاضلية على الشكل الأتي:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt} + \ \dots\dots\dots{+}a_0 y = g(t) \qquad (5)$$

مع تفاضلاتها كتالي:$y(t)$وإعطاء الشروط الإبتدائية للدالة

$$y(0) = y_0, \quad y^{`}(0) = y_1, \quad y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$$

حيث:

ثوابت$a_i, i = 0,1,2,\dots\dots.., n \qquad , y_0, y_1, \dots\dots.. y_{n-1}$

بإستخدام خاصية الخطية للابلاس والمعادلة (4) لطرفي المعادلة (5)، نحصل على الصورة العامة التالية:

$$\begin{aligned} a_n\{s^n Y(s) - s^{n-1} y^{`}(0) - \cdots - y^{n-1}(0)\} \\ + a_{n-1}\{s^{n-1} Y(s) - s^{n-2} y^{`}(0) - \cdots \\ - y^{n-2}(0)\} + \cdots + a_0 Y(s) = G(s) \end{aligned} \qquad (6)$$

حيث

$$l\{y(t)\} = Y(s), \qquad l\{g(t)\} = G(s)$$

بجمع الحدود المتشابهة، نحصل على:

$$P(s)Y(s) = Q(s) + G(s) \qquad (7)$$

$$Y(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} + \frac{G(s)}{P(s)} \qquad (8)$$

حيث

$$P(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0 \qquad (9)$$

تم استلام الورقة بتاريخ:24/ 8 /2023م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:1/ 2023/10م

والشروط الإبتدائية

$Q(s)$ هي كثيرة حدود من درجة أقل من أو يساوي $n-1$ تتكون من النواتج المختلفة a_i السابقة ، $G(s)$ هي تحويل لابلاس للدالة $g(t)$.

ويكون الحل النهائي هو:

$$y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} \tag{10}$$

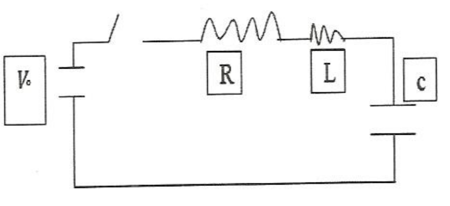
حيث يتم إستخدام جدول لابلاس العكسي والكسور الجزئية.

التطبيقات الفيزيائية لتحويل لابلاس:

توجد العديد من التطبيقات العملية في الحياة الواقعية لتحويل لابلاس، وخاصة في مجالات العلوم والهندسة والفيزياء،، فعند تطبيق قانون لابلاس لوحظ أنه عندما يمر تيار كهربائي داخل سلك موجود في حقل مغناطيسي، فإن السلك يتحرك من تحت تأثير قوة مغناطيسية متولدة عن التيار الكهربائي والحقل المغناطيسي معا، ومن أهم هذه التطبيقات [5]:

1- الدوائر الكهربائية

تعتبر الدائرة الكهربائية المتكونة من مصدر جهد للتيار المتردد (V) على التوالي، مع عنصر مقاومة أوم (R) ومكثف ذي سعة (C) على التوالي مع ملف ذي معامل حث ذاتي (L) [6،7].



فتنتج المعادلة الحاكمة التالية: $[KVL]$ نطبق قانون كيرشوف للجهد

$$R_i + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}\int idt = V_0 \tag{11}$$

وإعادة الترتيب بتفاضل المعادلة السابقة بالنسبة t

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{c}i = 0 \tag{12}$$

تم استلام الورقة بتاريخ:24/ 8 /2023م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:1/ 10/2023م

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{L\,c}\,i = 0 \qquad (13)$$

نعتبر الشروط الإبتدائية التالية

$$i(0) = V_0 \qquad , i^{`}(0) = \frac{-1}{c} - \frac{V_0}{RC} \qquad (14)$$

نطبق تحويل لابلاس على الطرفين في المعادلة (13)، نحصل على

$$S^2 I(s) - Si(0) - i^{`}(0) + \frac{R}{L}[SI(s) - i(0)] + \frac{1}{LC}I(s) = 0 \qquad (15)$$

باستخدام الشروط وإعادة الترتيب، نحصل على:

$$I(s)\left[S^2 + \frac{R}{L}S + \frac{1}{LC}\right] = SV_0 + \frac{RV_0}{L} - \frac{I_0}{c} - \frac{V_0}{RC} \qquad (16)$$

$$I(s) = \frac{SV_0 + \frac{RV_0}{L} - \frac{I_0}{c} - \frac{V_0}{RC}}{S^2 + \frac{R}{L}S + \frac{1}{LC}} \qquad (17)$$

بأخد تحويل لابلاس العكسي للطرفين في المعادلة (17)-

$$L^{-1}\{I(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{SV_0}{S^2 + \frac{R}{L}S + \frac{1}{LC}}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{\frac{RV_0}{L} - \frac{I_0}{c} - \frac{V_0}{RC}}{S^2 + \frac{R}{L}S + \frac{1}{LC}}\right\} \qquad (18)$$

بإكمال المربع للمقام، والتعويض في المعادلة (18)، نحصل على:

$$\begin{aligned}(t) &= V_0 L^{-1}\left\{\frac{s}{((s+\alpha)^2 + W^2)}\right\} \\ &\quad + L^{-1}\left\{\frac{A}{((s+\alpha)^2 + W^2)}\right\} \\ &= V_0 e^{-\alpha t}\cos wt + \frac{A}{w}e^{-\alpha t}\sin wt \qquad (19)\end{aligned}$$

حيث:

تم استلام الورقة بتاريخ:24/ 8 /2023م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:1/ 10/2023م

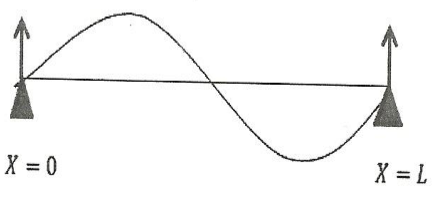
$$A = \frac{RV_0}{L} - \frac{I_0}{c} - \frac{V_0}{RC}, \qquad \alpha = \frac{R}{2L}, \qquad W^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$$

ويمكن كتابتها بالشكل: t المعادلة (19) تمثل التيار داخل الدائرة عند أي لحظة زمنية

$$(t) = e^{\frac{-R}{2L}t}\left\{V_0 \cos\left\{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\ t\right\} + \frac{\frac{RV_0}{L} - \frac{I_0}{c} - \frac{V_0}{RC}}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} \sin\left\{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\ t\right\}\right\} \qquad (20)$$

2- الإهتزاز التوافقي لقضيب مرن

كما بالشكل التالي: إذا اعتبرنا قضيب مرن، وله مقطع عرض موازي للمستوى yz



فالمعادلة الاساسية التي تحكم هذه الظاهرة [8، 9].

$$EI\frac{d^4F}{d\,x^4} - Mw^2F = 0 \qquad (21)$$

والشروط الحدية لهذه المعادلة

$$F(0) = 0 \ , \quad F^{``}(0) = 0 \quad , \ F^{``}(L) = 0$$

معامل ينج للمرونة E حيث

عزم القصور الذاتي I الكتلة لوحدة الأطوال M التردد الزاوي w

نحصل على: ووضع $\alpha^4 = \frac{Mw^2}{EI}$ EI بقسمة المعادلة (21) على

$$\frac{d^4F}{d\,x^4} - \alpha^4\,F = 0 \qquad (22)$$

تم استلام الورقة بتاريخ:24/ 8 /2023م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:1/ 10/2023م

بأخذ تحويل لابلاس للطرفين في المعادلة (22) نحصل على

$$s^4F(s) - s^3F(0) - s^2F^{`}(0) - sF^{``}(0) - F^{```}(0) - \alpha^4F(s) = 0 \qquad (23)$$

من الشروط الإبتدائية المعطاة وإعادة الترتيب:

$$F(s)\{s^4 - \alpha^4\} = s^2F^{`}(0) + F^{```}(0) \qquad (24)$$

$$F(s) = \frac{s^2F^{`}(0) + F^{```}(0)}{\{s^4 - \alpha^4\}} \qquad (25)$$

بأخذ تحويل لابلاس العكسي للمعادلة (25)

$$L^{-1}\{F(s)\} = F^{`}(0)L^{-1}\left\{\frac{s^2}{s^4 - \alpha^4}\right\} + F^{```}(0)L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4 - \alpha^4}\right\} \qquad (26)$$

فنجد أن الطرف الأيسر

$$L^{-1}\{F(s)\} = F(x)$$

أما الطرف الأيمن يستخدم فيه الكسور الجزئية كتالي:

$$\frac{s^2}{s^4 - \alpha^4} = \frac{As + B}{s^2 - \alpha^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + \alpha^2}$$

$$s^2 = (As + B)(s^2 + \alpha^2) + (Cs + D)(s^2 - \alpha^2)$$

بمقارنة المعاملات، نجد أن

$$A = C = 0 \quad , B = D = \frac{1}{2}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s^2}{s^4 - \alpha^4}\right\} = \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - \alpha^2}\right\} + \frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 + \alpha^2}\right\} \qquad (27)$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\sin h\alpha x + \frac{1}{2\alpha}\sin \alpha x$$

أما المقدار $\frac{1}{s^4 - \alpha^4}$

$$\frac{1}{s^4 - \alpha^4} = \frac{As + B}{s^2 - \alpha^2} + \frac{Cs + D}{s^2 + \alpha^2}$$

تم استلام الورقة بتاريخ:24/ 8 /2023م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:1/ 10/2023م

$$1 = (As+B)(s^2+\alpha^2)+(Cs+D)(s^2-\alpha^2)$$

بمقارنة المعاملات نجد أن

$$A = C = 0 \quad , B = \frac{1}{2\alpha^2} = D = \frac{-1}{2\alpha^2}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^4-\alpha^4}\right\} = \frac{1}{2\alpha^2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-\alpha^2}\right\} - \frac{1}{2\alpha^2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+\alpha^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2\alpha^3}\sin h\alpha x - \frac{1}{2\alpha^3}\sin \alpha x \tag{28}$$

بالتعويض من (27),(28) في(26) نجد أن:

$$F(X) = F^{`}(0)\left(\frac{1}{2\alpha}\sin h\alpha x + \frac{1}{2\alpha}\sin \alpha x\right) + F^{```}(0)\left(\frac{1}{2\alpha^3}\sin h\alpha x - \frac{1}{2\alpha^3}\sin \alpha x\right) \tag{29}$$

$$F(X) = \left[\frac{F^{`}(0)}{2\alpha} + \frac{F^{```}(0)}{2\alpha^3}\right]\sin h\alpha x + \left[\frac{F^{`}(0)}{2\alpha} - \frac{F^{```}(0)}{2\alpha^3}\right]\sin \alpha x \tag{30}$$

$$A_1 = \left[\frac{F^{`}(0)}{2\alpha} + \frac{F^{```}(0)}{2\alpha^3}\right]$$

بالتالي

$$A_2 = \left[\frac{F^{`}(0)}{2\alpha} - \frac{F^{```}(0)}{2\alpha^3}\right]$$

$$F(X) = A_1 \sin h\alpha x + A_2 \sin \alpha x \tag{31}$$

بإستخدام الشرطان

$$F(L) = 0\,, \qquad F^{``}(L) = 0 \tag{32}$$

تم استلام الورقة بتاريخ:24/ 8 /2023م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:1/ 10/2023م

لإيجاد الثوابت A_1, A_2

$$0 = A_1 \sin h\alpha L + A_2 \sin \alpha L \tag{33}$$

$$0 = A_1 \alpha^2 \sin h\alpha L + A_2 \alpha^2 \sin \alpha L \tag{34}$$

أو:

$$0 = A_1 \sin h\alpha L + A_2 \sin \alpha L \tag{35}$$

بجمع (33)، (35) نحصل على

$$0 = A_1 \sin h\alpha L \tag{36}$$

$$\sin h\alpha L \neq 0 \qquad \therefore\ A_1 = 0 \tag{37}$$

بطرح المعادلتين (33)،(35) نحصل على:

$$2A_2 \sin \alpha L = 0 \tag{38}$$

وللحصول على حل غير الحل التافه، نفرض أن:

$$A_2 \neq 0 \quad \therefore\ \sin \alpha L = 0\ ,\ \alpha L = n\pi \tag{39}$$

$$\alpha = \frac{n\pi}{L} \tag{40}$$

نعوض من المعادلة (40)، (37) في المعادلة (31)

$$F_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{41}$$

لإيجاد التردد الزاوي نستخدم المعادلة (40)

من الفرضية

$$\alpha^4 = \frac{n^4\pi^4}{L^4} \tag{42}$$

$$\alpha^4 = \frac{Mw^2}{EI} \tag{43}$$

تم استلام الورقة بتاريخ:24/ 8 /2023م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:1/ 2023/10م

نحصل من (42)، (43) على:

$$\frac{Mw^2}{EI} = \frac{n^4\pi^4}{L^4} \quad (44)$$

$$w^2 = \frac{n^4\pi^4 EI}{ML^4} \quad (45)$$

$$\therefore \ W_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{M}} \quad (46)$$

الخلاصة:

الرياضيات والفيزياء علميين يكملان بعضهما البعض، ففي هذا البحث تم تناول هذين العلمين، ففي الجانب النظري تم شرح تحويل لابلاس ،لابلاس العكسي، الكسور الجزئية، وفي الجانب التطبيقي تم استخدام هذا التحويل في بعض النطبيقات الفيزيائية، عن طريق تحويل المعادلات التفاضلية الحاكمة إلى معادلات جبرية، سهلة الإستخدام، وبالتالي تسهيل حل المعادلات الفيزيائية.

المراجع:

[1] محمد أدم حمدان، أحمد حماد رحاب إبراهيم، تحويلات لابلاس وبعض تطبيقاتها الفيزيائية، جامعة أم درمان الإسلامية، كلية التربية- السودان، 2018.

[2] أ.د حسن مصطفى العويضي، د. عبد الوهاب عباس رجب، د. سناء علي زارع، المعادلات التفاضلية، الجزء الأول، مكتبة الرشد، 2006.

[3] د. مجدي أمين كتبي، د. مروان أمين كتبي، المرشد لحل المعادلات التفاضلية العادية، مكتبة الملك فهد- مكة، 1999.

[4] مواري.ر. شبيجل، الرياضيات المتقدمة للمهندسين والعلميين، الدار الدولية للنشر والتوزيع_ لبنان، 1991.

تم استلام الورقة بتاريخ:24/ 8 /2023م وتم نشرها على الموقع بتاريخ:1/ 10/2023م

[5] Pawanpreet Kaur, Dr. Harish Nagar, 2023, LAPLACE TRANSFORMS AND ITS APPLICATIONS, Punjab, India.

[6] Rahul M. Jetwani, Ujjvala Y. Gawarguru, Rajshree A. Naphade, Mitali K. Tibdewal, 2017, Applications of Laplace Transformation in Engineering Filed, Department of Applied science & Humanities, Shegaon- India.

[7] Eman Mohammad Al-qatawneh, Dr. Khaled I. Nawafleh, Prof, 2017, Laplace Transform Applications of Fractional Differential Equations, Mu`tah University, Jordan.

[8] Emil Shoukralla, 2018, Laplace Transforms, Menoufia University.

[9] Dr. Dinesh Verma, June- 2018, An Overview of some special functions, College of Engineering and Technology, Jammu.